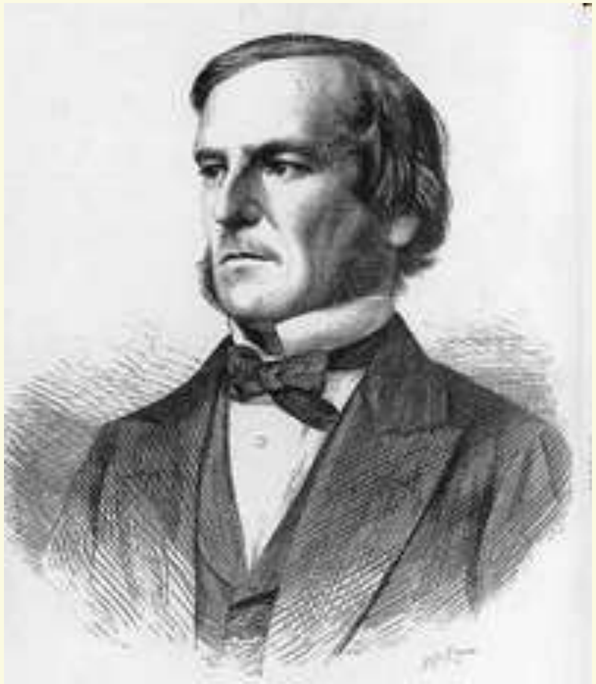
БУЛЕВА АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Определение булевой алгебры

Название этого раздела математики связано с именем его основателя – Джорджа Буля.

английский математик и логик, один из основоположников математической логики. Разработал алгебру логики (булеву алгебру)

(«Исследование законов мышления», 1854), основу функционирования цифровых компьютеров.



Используя классическое понятие алгебры, булеву алгебру можно определить как систему

$A=(B,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$, **в которой несущим множеством является двухэлементное множество двоичных чисел** $B=\{0,1\}$, **а** $\Omega=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ **– заданные на этом множестве логические операции, сущность которых рассмотрим позднее.**

Основные логические операции, - **дизъюнкция**, **конъюнкция** и **отрицание**, - можно интерпретировать как операции, введенные в теории множеств: свойства указанных операций аналогичны свойствам операций объединения, пересечения и дополнения множеств соответственно.

Однако логические операции имеют несколько иной смысл; они позволяют формировать простые и сложные высказывания. Все множество логических операций обозначается E_2.

Как правило, существует логическая интерпретация элементов множества B**:**

1 **– истинно;** 0 **– ложно.**

В ряде случаев такой смысл не придается, и в качестве элемента множества рассматривается двоичная переменная (ее называют также логическая или булева переменная) x**, которая принимает значения**

$x = 0$ **или** $x = 1$.

Области применения булевой алгебры

Булева алгебра применяется:

1) как средство алгоритмического описания в языках программирования для определения логических условий;

2) как средство формирования логических высказываний в математической логике, лингвистике, теории искусственного интеллекта;

3) как средство разработки и описания дискретных технических систем;

4) как формальная модель лежащая в основе языков программирования.

Алгебра логики позволяет производить анализ и синтез логических устройств.

Анализ **– это поиск аналитического выражения, которое описывает работу системы.**

Синтез **– обратная задача: создание технического устройства на основе математического описания средствами булевой алгебры.**

Понятие функции и способы ее задания

Пусть имеется n **двоичных переменных** $x_1, x_2, \ldots, x_n$**. Каждая из них в некотором конкретном случае может принимать значение** 0 **или** 1**. Полученный набор элементов есть двоичный вектор длины** n**. Каждому конкретному набору можно поставить в соответствии одно из значений** 0 **или** 1**.**

Функция *f*, задающая однозначное отображение множества всевозможных наборов значений двоичных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ во множество $\{0,1\}$ называется функцией алгебры логики (или логической функцией, булевой функцией, переключательной функцией):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y; \ (y = 0 \text{ или } y = 1)$$

Таким образом, логическая функция – это зависимость, которая устанавливает связь между сочетанием значений входных двоичных переменных и двоичным значением этой функции.

Способы задания функции. Логическая функция может быть задана:

1) математическим выражением (формулой);

2) таблицей.

Таблица является наиболее общим и универсальным способом задания функции. В её левой части перечисляют всевозможные наборы значений двоичных переменных, а в правой — значения функции на этих наборах.

Такие таблицы, описывающие функции, называют таблицами истинности.

В *таблицах 2.1* **и** *2.2* **приведены примеры таблиц истинности.**

Таблица 2.1

x_1	x_2	…	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0		0	$f(0, 0, \dots, 0)$
1	0		1	$f(1, 0, \dots, 1)$
…	…	…	…	…
1	1		1	$f(1, 1, \dots, 1)$

Таблица 2.2

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Оценим число возможных наборов (число строк входных переменных).

Конкретный набор – это вектор значений

$$\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$$

Количество наборов – это мощность прямого произведения n двухэлементных множеств B:

$$a = \left|B^n\right| = \left|B\right|^n = 2^n$$

где n – число входных элементов.

Оценим возможное количество вариантов логических функций от n **переменных. Множество вариантов логической функции можно представить как прямое произведение:**

$$M = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_i \times \ldots \times B_a = B^a$$

где B_i **– значение функции на наборе** i**.**

Таким образом, общее количество функций от n **переменных**

$$m = \left|B^a\right| = \left|B\right|^a = 2^a$$

где

$$a = 2^n$$

Наборы, на которых функция равна единице, называют единичными наборами, а наборы, на которых функция равна нулю, называют нулевыми.

Если функция при любых значениях аргументов принимает значение *0*, то такую функцию называют нулевой или константой *0* (тождественно ложная функция).

Функция, которая на всех наборах равна *1*, называется единичной или константой *1* (тождественно истинная функция).

Если функция определена не на всех наборах аргументов, то она называется не полностью определенной или частично определенной.

С использованием трех основных функций (дизъюнкции, конъюнкции и отрицания) могут образовываться более сложные функции. Поэтому можно дать еще одно определение булевой алгебры.

Булевой алгеброй называется алгебра типа,

несущим множеством которой является множество двоичных чисел, а операциями - конъюнкция, дизъюнкция и отрицание.

Задание функции формулой. Эквивалентные преобразования логических выражений

Понятие формулы вводится для формализации представления и записи простого или сложного высказывания.

Формула рассматривается как некоторый способ реализации функции и вводится индуктивно в соответствии со следующим правилом: если *A* и *B* – высказывания (простые или сложные, постоянные или переменные), то запись значения истинности каждого из этих высказываний – есть формула; если A и B – формулы, то выражения

«$A * B$» и «$\bar{A}$» (где символ * обозначает знак одной из рассмотренных выше элементарных логических операций) – тоже формулы.

Таким образом, рассмотренные выше выражения, которыми описывались элементарные логические операции и свойства основных логических операций, - суть формулы. Применение по отношению к ним указанного правила позволяет получить новые формулы, соответствующие более сложным высказываниям.

Новые формулы могут быть получены на основе использования понятия суперпозиции функций.

Суперпозицией функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ **называется функция** f**, полученная путем подстановки функций** $f_1, f_2, \ldots, f_n$ **друг в друга и переименования переменных.**

Пример. Пусть функция задана формулой $f_0(z_1, z_2) = z_1 \to z_2$ **, и при этом имеет место равенство** $z_1 = A_1 = x_1 \vee x_2, \quad z_2 = A_2 = x_3$

Тогда новую формулу *E* **над можно получить путем подстановки** A_1 **и** A_2 **в исходную формулу:**

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \to x_3$$

Полученную формулу вновь представим как исходную, и, полагая далее

$$A_1 = f_0(x_1, x_2, x_3),\ A_2 = x_3,\ A_3 = x_1 \cdot x_2$$

делаем вновь подстановку.

Тогда новая формула над E :

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = (((x_1 \vee x_2) \to x_3) \vee x_3) \to x_1 \cdot x_2$$

Логические операции обладают различным приоритетом, с точки зрения порядка выполнения их в выражении. Принят следующий порядок выполнения операций в булевой алгебре:

- в первую очередь вычисляются выражения, над которыми стоит знак отрицания,
- далее выполняются операции конъюнкции , а затем дизъюнкции .
- Если выражение, заключенное в скобках, представляет конъюнкцию или имеет общий знак отрицания, то скобки опускаются.

Сопоставляя введенные выше понятия логической функции и формулы, следует иметь ввиду, что

логическая функция - это зависимость между логическими переменными, однозначно определяемая таблицей истинности, а

формула это выражение, которое используется для описания логической функции, причем одна и та же логическая функция может описываться несколькими формулами.

Пример. Рассмотрим две формулы:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$$

и

$$f(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

Несложно показать, что обе формулы представляют одну и ту же функцию, так как таблицы истинности у них одинаковы.

Формулы, соответствующие одной и той же функции, называются эквивалентными или равносильными.

1.Преобразование формулы, описывающей функцию $f_4: a \to b = \bar{a} \vee b$

Справедливость преобразования доказывается соответствующей таблицей истинности.

a	b	$\bar{a}$	$a \to b$	$\bar{a} \vee b$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2.Преобразование формулы, описывающей функцию $f_5 : a \sim b = ab \vee \bar{a}\bar{b} = (a \to b)(b \to a)$

Справедливость преобразования доказывается соответствующей таблицей истинности.

a	b	$a \sim b$	ab	$\bar{a}\bar{b}$	$ab \vee \bar{a}\bar{b}$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1

3. Функция f_6

$$a \oplus b = \overline{a \sim b} = \overline{ab \vee \bar{a}\bar{b}} = \overline{ab} \cdot \overline{\bar{a}\bar{b}} = (\bar{a} \vee \bar{b}) \cdot (a \vee b)$$

4. Функция f_7

$$a \mid b = \overline{a \cdot b}$$

5. Функция f_8

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b}$$